Etudes de Fonctions

EXERCICE N°1 :

1) On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = 1 + x - e^{x}$.
   a- Dresser le tableau de variation de f.
   b- Montrer que la droite $\Delta : y = x + 1$ est une asymptote à (ζ_f) au voisinage de $-\infty$.
   c- Etudier la position de (ζ_f) par rapport à Δ.
   d- Tracer Δ et (ζ_f).
2) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par (ζ_f),Δ et les droites d'équations x=-1 et x=0

EXERCICE N°2 :

1/ Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = -1 + x + 2\ln x$
  a- Etudier le sens de variation de g.
  b- Calculer g(1) puis déterminer le signe de g(x) sur $]0,+\infty[$.
  c- En déduire que : si $0 < x < 1$ alors $g(\frac{1}{x}) > 0$

  si $x > 1$ alors $g(\frac{1}{x}) < 0$

2/ On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ln x & \text{si} \quad x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

  ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$. ″unité graphique :2 cm″
  a- Montrer que f est dérivable à droite en 0.
  b- Calculer f'(x) et vérifier que pour tout $x > 0$, $f'(x) = xg(\frac{1}{x})$
  c- Dresser le tableau de variation de f.
  d- Montrer que l'équation f(x) = 0 admet dans $]0,+\infty[$ une solution unique α tel que $7/4<\alpha<2$.
3/ a- Vérifier que la tangente Δ à ζ_f au point O a pour équation y = x.
   b- Etudier la position de ζ_f par rapport à Δ.
   c- Tracer Δ et ζ_f .
4/ Soit λ un réel de l'intervalle$]0,1[$.
  a- Calculer en cm^2 ; l'aire A(λ) du domaine limité par ζ_f, la droite Δ et les droites d'équations x = λ et x = 1.
  b- Calculer la limite de A(λ) lorsque λ tend vers 0^+ .
5/ On considère la suite u_n définie par : $u_0 \in]0,1[$ et $\forall\ n \in IN : u_{n+1} = f(u_n)$.
  a- Montrer que pour tout $n \in IN$, on a : $0 < u_n < 1$.
  b- Montrer que la suite u_n est croissante.
  c- En déduire que la suite u_n est convergente et trouver sa limite.

EXERCICE N°3 :

La courbe (fig_1) représente une fonction f définie sur $]0,+\infty[$ et la droite D : y = x.
1) Par une lecture graphique déterminer :
   a- $\lim\limits_{x\to+\infty} f$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.
   b- Le tableau de variation de f.
2) Soit g la restriction de f à $[1,+\infty[$.
   a- Justifier que g réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
   b- Tracer la courbe $(\zeta_{g^{-1}})$ de la fonction réciproque de g dans le même repère.
3) On suppose que $f(x) = x + (x - 2)\ln x$. A l'aide d'une intégration par partie calculer A l'aire de la partie du plan délimitée par (ζ_f) , $(\zeta_{g^{-1}})$ et les droites d'équations x = 1 et x = 2.

EXERCICE N°4 :

Dans le graphique (fig$_2$), ζ_f désigne la courbe représentative de f dans un R.O $(o, \vec{i}, \vec{j})$

La droite Δ : x = -2 est une asymptote à la courbe ζ_f .

1/ Donner f(-1) ; f'(-1) ; $\lim\limits_{x \to (-2)^+} f(x)$ et le nombres de solutions dans IR de l'équation f(x) = 0

2/ On suppose dans la suite que pour tout $x \in]-2,+\infty[$, f(x) = -2x + m + pln(x + 2), m et $p \in$ IR.

a- Montrer que m = 1.

b- Calculer f'(x) en fonction de p.

c- Montrer que f(x) = -2x + 1 + 2ln(x + 2)

d- Etudier la position de ζ_f par rapport à la droite D d'équation y = -2x + 1.

3/ a- Montrer à l'aide d'une intégration par partie que $\int_{-1}^{1} \ln(x+2)dx = 3\ln(3) - 2$

b- En déduire l'aire de la partie du plan limitée par la courbe ζ_f , la droite D et les droites d'équations respectives x = 1 et x = -1

(fig$_1$)

(fig$_2$)